ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

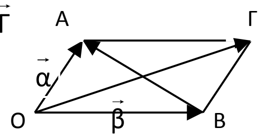
<u>Ισότητα διανυσμάτων</u>

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right|\\ \overrightarrow{AB}\,||\,\overrightarrow{\Gamma\Delta}\end{cases}$$

<u>Πρόσθεση-Αφαίρεση διανυσμάτων</u>

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}$$

$$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$$



<u>1η συνθήκη παραλληλίας</u> : $\vec{\alpha}\,||\,\vec{\beta}\overset{\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow}\vec{\alpha}=\lambda\cdot\vec{\beta}$

● Αν λ>0, τότε $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ ● Αν λ<0, τότε $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$

<u>2η συνθήκη παραλληλίας</u> :

$$\vec{\alpha}\,||\,\vec{\beta}\Leftrightarrow\det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=0$$

όπου $\vec{\alpha}=\left(x_1,y_1\right)$ και $\vec{\beta}=\left(x_2,y_2\right)$

<u>Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος</u> :

Αν $\vec{\alpha}=\left(x,y\right)$, τότε $\lambda_{\vec{\alpha}}=\dfrac{y}{x}=\varepsilon\varphi\theta$,

όπου $\theta=\left(x'x,\vec{\alpha}\right)$ και $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$

<u>3η συνθήκη παραλληλίας</u> :

$$\vec{\alpha}\,||\,\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_{\vec{\alpha}}=\lambda_{\vec{\beta}}$$

<u>Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων</u>:

Ορισμός: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)$ με $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$

Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

<u>Αναλυτική έκφραση εσωτερικού γινομένου</u>:

Αν $\vec{\alpha}=\left(x_1,y_1\right)$ και $\vec{\beta}=\left(x_2,y_2\right)$ τότε

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$$

<u>Μέτρο διανύσματος</u>

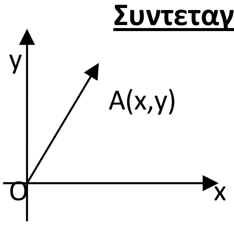
● Αν $\vec{\alpha}=\left(x_1,y_1\right)$ τότε

$$\left|\vec{\alpha}\right|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

● Αν $\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1,y_2-y_1\right)$ τότε

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$$

<u>Συντεταγμένες διανύσματος</u>



$$\vec{\alpha}=\overrightarrow{OA}=x\vec{i}+y\vec{j}\quad,x,y\in\mathbb{R}$$

Αν $A\left(x_1,y_1\right)$ και $B\left(x_2,y_2\right)$

τότε $\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1,y_2-y_1\right)$

<u>Συντεταγμένες μέσου τμήματος</u>

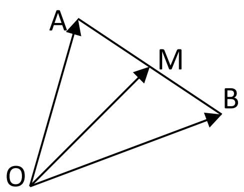
Αν $A\left(x_1,y_1\right)$, $B\left(x_2,y_2\right)$ τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ , τότε το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ είναι το $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

<u>Συνευθειακά σημεία:</u>

Α,Β,Γ συνευθειακά $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\,||\,\overrightarrow{A\Gamma}$

<u>Γωνία διανυσμάτων</u> : $\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|}$

<u>Διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος</u>:



$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$$

<u>Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα</u>

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$$

<u>Κάθετα διανύσματα</u>:

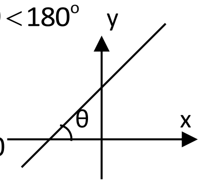
● $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ ● $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_{\vec{\alpha}}\cdot\lambda_{\vec{\beta}}=-1$

Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας :

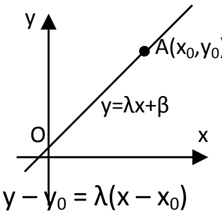
$\lambda = \varepsilon\varphi\theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $0 \le \theta < 180^o$

$\theta \in (0^o, 90^o) \Leftrightarrow \lambda > 0$

$\theta \in (90^o, 180^o) \Leftrightarrow \lambda < 0$

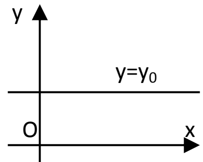


Εξίσωση ευθείας :

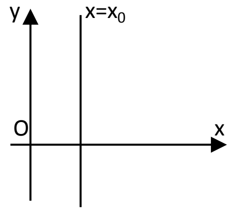


$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$

ή $y = \lambda x + \beta$, $\lambda \neq 0$



λ=0



Δεν ορίζεται λ

Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας: $Ax+By+\Gamma=0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ και $\lambda_\varepsilon = -\dfrac{A}{B}$

► $\vec{\delta} \parallel \varepsilon$ τότε $\vec{\delta} = (B, -A)$ και $\vec{\eta} \perp \varepsilon$ τότε $\vec{\eta} = (A, B)$

► $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ και $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

Διχοτόμος γωνίας ή Μεσοπαράλληλος

Αν Μ σημείο της διχοτόμου ή της μεσοπαραλλήλου τότε ισχύει :

$d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2)$

Εμβαδόν τριγώνου :

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$, τότε

$$E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{matrix} \right\|$$

Απόσταση σημείου από ευθεία :

Αν ε: $Ax+By+\Gamma=0$ και $M(x_0, y_0)$, τότε

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Απόσταση παραλλήλων :

ε_1: $y=\lambda x+\beta_1$, ε_2: $y=\lambda x+\beta_2$

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$$

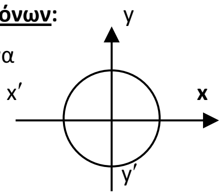
Κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων:

c : $x^2 + y^2 = \rho^2$, όπου ρ η ακτίνα

Εξίσωση εφαπτομένης :

ε: $xx_1 + yy_1 = \rho^2$,

όπου (x_1, y_1) το σημείο επαφής



Κύκλος με τυχαίο κέντρο :

c : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$, όπου $K(x_0, y_0)$ το κέντρο και ρ η ακτίνα

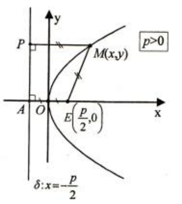
Γενική μορφή εξίσωσης κύκλου:

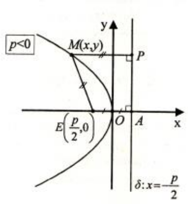
c : $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \dfrac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η ευθεία (ε) να εφάπτεται του κύκλου : $d(K, \varepsilon) = \rho$

Παραβολή

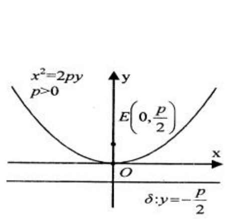
Ορισμός: $d(M, \delta) = d(M, \varepsilon)$

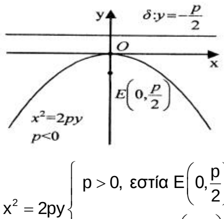




$$y^2 = 2px \begin{cases} p > 0, \text{ εστία } E\left(\frac{p}{2}, 0\right) \in Ox \text{ ,διευθετούσα } x = -\frac{p}{2} \\ p < 0, \text{ εστία } E\left(\frac{p}{2}, 0\right) \in Ox', \text{ διευθετούσα } x = -\frac{p}{2} \end{cases}$$

Εξίσωση εφαπτομένης: $yy_1 = p(x + x_1)$



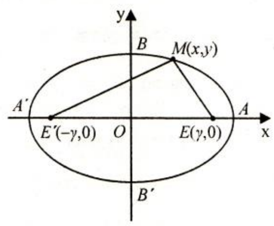


$$x^2 = 2py \begin{cases} p > 0, \text{ εστία } E\left(0, \frac{p}{2}\right) \in Oy, \text{ διευθετούσα } y = -\frac{p}{2} \\ p < 0, \text{ εστία } E\left(0, \frac{p}{2}\right) \in Oy', \text{ διευθετούσα } y = -\frac{p}{2} \end{cases}$$

Εξίσωση εφαπτομένης: $xx_1 = p(y + y_1)$

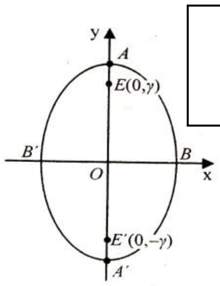
Έλλειψη

$(ME') + (ME) = 2\alpha$ και $(E'E) = 2\gamma$



$\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$, $\alpha > \beta$

Εξίσωση εφαπτομένης: $\dfrac{xx_1}{\alpha^2} + \dfrac{yy_1}{\beta^2} = 1$



Εκκεντρότητα

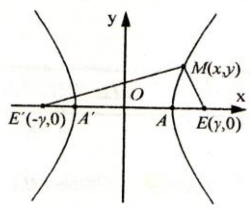
$\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha} < 1$

$\dfrac{x^2}{\beta^2} + \dfrac{y^2}{\alpha^2} = 1$, $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$, $\alpha > \beta$

Εξίσωση εφαπτομένης : $\dfrac{xx_1}{\beta^2} + \dfrac{yy_1}{\alpha^2} = 1$

Υπερβολή

$|(ME') - (ME)| = 2\alpha$ και $(E'E) = 2\gamma$

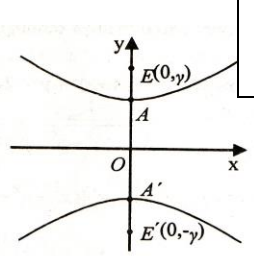


$\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$

Εξίσωση εφαπτομένης: $\dfrac{xx_1}{\alpha^2} - \dfrac{yy_1}{\beta^2} = 1$

Εκκεντρότητα

$\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha} > 1$



$\dfrac{y^2}{\alpha^2} - \dfrac{x^2}{\beta^2} = 1$, $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$

Εξίσωση εφαπτομένης : $\dfrac{yy_1}{\alpha^2} - \dfrac{xx_1}{\beta^2} = 1$